Conformal Field Theoryの物性への応用(基研研究会「統計物理の展望」,研究会報告)

AUTHOR(S):

押川, 正毅

Conformal Field Theory の物性への応用

東京工業大学 理学部物理 押川正毅
oshikawa@stat.phys.titech.ac.jp

1 はじめに

この講演は非専門家のために共形場理論 (Conformal Field Theory, CFT) とその応用について簡単な紹介をすることを目標に行われました。もちろんこの分野の全貌を短時間で説明することは不可能だと思いますが、雰囲気だけでも伝えられたら幸いです。なお、文献は多数あるので、入門的な文献で取り上げられることの少ないパーコレーションに関するものを除くと、レビューや教科書のみを挙げました。

2 CFT とは何か

CFT は、2 次元 (空間 2 次元の古典統計力学系、または空間 1 次元 + 時間 1 次元の量子力学系) の臨界現象を記述する理論です。臨界現象の研究から、一般に臨界点直上ではスケール不変性が現われるということは良く知られています。簡単に言うと、長距離での系のふるまいは、系全体を例えば半分や 1/3 に縮小してみても変わらないということです。

スケール不変性は、理論的にはどのように理解できるでしょうか？現在のところ、スケール不変性だけでなく、臨界現象一般を理解する上で最も強力な概念はくりこみ群でしょう。(田崎さんの講演も参照して下さい。) くりこみ群とは、簡単に言うとあるハミルトニアンなりラグランジアンなりが与えられた時、系全体を (例えば) 半分に縮小して見た時の有効ハミルトニアンを求めるという考え方です。この変換 (くりこみ変換) をくりかえし適用すると、原理的には長距離での系のふるまいがわかります。例えば格子間隔の 65536 倍のスケールでの系のふるまいを元のハミルトニアンを使って考えるのは (臨界点の近くでは) 困難です。しかし、系全体を半分に縮小して見る、ということを 32 回くりかえすと、最終的に得られた有効ハミルトニアンでは格子間隔のスケールでの系のふるまいを調べれば良いことになります。(元の問題に引き戻すと、65536 格子間隔でのふるまいを調べたことになる。)

もちろん、上のようなくりこみ変換を、具体的な系について実際に計算しようとするとなかなか難しい問題があります。しかし、少なくとも原理的にはそのような変換があると信じることによっていろいろなことを理解することができます[1]。先ほどのスケール不変性の話に戻りましょう。くりこみ変換は「全ての可能なハミルトニアンのなす空間」の中での写像だと見なすことができます。つまり、だんだん系を縮小して大きなスケールでのふるまいを見ることは、くりこみ変換によって生成されるハミルトニアンの流れを追って行くことに対応します。系がちょうど臨界点にある場合は、この流れの行き着く先に、くりこみ変換をしてもハミルトニアンが変化しない点 (固定点) があります[2]この場合、十分大きなスケールでの系のふるまいを考えるとそこで系を縮小して見ても有効ハミルトニアンは変わらないわけですからスケール不変性が自然に理解できます。

さて、くりこみ群で通常もう一つ仮定されることは、最初のハミルトニアンでの相互作用が局所的であれば、くりこみ変換によって得られる有効ハミルトニアンも局所的な相互作用しか持たない、ということです。実際に例えばイジングモデルについて標準的な方法で実空間くりこみ変換をすると、一回で遠距離の相互作用も出て来てしまいますが、相互作用は距離の関数として十分速く減衰すると仮定します。この局所性も真面目に考えると非常に難しい問題であり、実際「反例」(くりこみ変換をすると相互作用が局所的でなくなる) も知られています。しかし、今回考える範囲では局所性も成立するものと信じることにしましょう。

くりこみ変換された有効ハミルトニアンが局所的相互作用を持つことと、臨界点ではハミルトニアンが固定点に行き着いてくりこみ変換で不変になることを合わせて考えると、臨界点上の系の長距離でのふるまいは単なるスケール変換だけでなく、局所的なスケール変換に対しても不変になると考えることができます。局所的なスケール変換とは、無限小領域に対してはスケール変換と見なせるが、場所によって拡大／縮小の倍率が異なることも許すようなものです。これは等角写像 (あるいは共形変換) とも呼ばれるものです。

局所スケール不変性は、もちろんただのスケール不変性よりも強い性質です。

---

[1] くりこみ群を臨界指数を計算する単なる近似的な計算方法と見なして、例えば「高温展開＋パデ近似」等と同列に扱うのは、全く的外れな見方と言えるでしょう。(近似的な計算方法に意味がないと言っているわけではありません。)

[2] 臨界点でない場合も流れの行き着く先を固定点と考えることもできますが、この場合は「固定点」は自明なものとなります。例えばイジングモデルの場合、$T > T_c$ では完全に乱れた状態に対応する「固定点」、$T < T_c$ では完全にスピンの揃った状態に対応する「固定点」に行き着きます。

一般の次元では局所スケール不変性もそれほど強い性質ではありません。しかし、2次元では事情が違います。2次元での局所スケール変換、すなわち等角写像は複素正則関数に対応することは良く知られています。複素正則関数の張る空間は無限次元ですから、2次元での局所スケール変換のなす群[3]は無限次元だと言うことになります。

CFTというのは、簡単に言えば系の性質を元のハミルトニアンやラグランジアンを使って調べることは一旦放棄して、上のようなくりこみ群のアイデアを背景にして系が共形不変性(局所スケール不変性)と言う無限次元の対称性を持つことを仮定し、この対称性を使って系の性質を決めて行こうという考え方です。統計力学系は無限自由度であるが故に難しい(そして面白い!)わけですが、無限次元の対称性があると、この対称性だけから無限自由度を持つ系の性質がかなり決まってしまうこともあり得るわけです。(もちろん、後で見るように対称性だけから完全に決まってしまうわけではなく、他の情報が必要になることもあります。)

なお、2次元以外の一般の次元では共形不変性は有限次元になってしまうのでこれだけではそれほど強いことは言えないのですが、それでも共形不変性を使っていろいろな議論がなされています。広い意味ではこれも含めてCFTと呼ぶべきかもしれませんが、ここでは話を2次元に限ることにします。

3　CFTは本当に使えるか?

CFTというのは共形不変性を仮定してその帰結を考える方法だと述べましたが、この仮定から何が言えるかということは数学的な問題としてはそれ自体に意味があるでしょう。しかし、統計力学／物性理論をやりたいという立場からは、研究の対象とするいろいろな系で実際に共形不変性の仮定が成立しないとそもそもCFTは役に立たないと言うことになります。

先ほど、くりこみ群を元にして共形不変性が何故現われるか、という議論をしました。これによると、局所的な相互作用をしている2次元系が臨界点にあれば一般に共形不変性がありそうだ、ということになります。しかし、具体的な統計力学や物性系のモデルに対してきちんとくりこみ変換を実行するのは実際には非常に難しく、くりこみ群による「流れ」が一体どうなっているのかは本当は良くわかっていないわけです。したがって、現時点では先程の議論は「こうなっているに違いない」という一種の信仰に過ぎないとも言えます。この「信仰」が本当に正しいかどうかチェックしないと科学にはなりませんね。

[3]正確には群と呼ぶのは問題がありますが、ここでは大雑把に考えることにします

もちろん先ほどのくりこみ群に基づく議論を頑張って厳密化する、という方向性もあるでしょうが、現状ではまだ無理でしょう。今のところ、共形不変性の仮定が正しいかどうかは、CFT でいろいろ予言をしてみて、その予言が実際のいろいろな系で成立しているかどうかをチェックするという方法で行われています。

このチェックの代表的な例として、イジングモデルがあります。共形不変性からいろいろなものを決定する、というのが CFT だったわけですが、もちろん共形不変性を持つ理論は一通りに決まる訳ではなく、いろいろな CFT があるわけです。(実際、無限個の CFT があります。) 2 次元イジングモデルの臨界点における長距離のふるまいはユニタリーミニマル系列と呼ばれる CFT の中で最も簡単 (で非自明) なもの ($m = 3$) に対応すると考えられています。2 次元正方格子上のイジングモデルについてはオンサーガーに始まる厳密解が有名ですが、相関関数の厳密解で長距離極限を見ると確かに CFT の予言と一致します。このように、厳密解の存在する (可積分な) モデルでは、その厳密解と CFT を比較することによって CFT のアイデアを適用できるかどうかをチェックすることができます。実際に、非常に多くの可積分系の臨界点におけるふるまいは CFT で記述できることがわかっています。

しかし、可積分なモデルというのは非常に特殊なもので、ほとんどのモデルは可積分ではありません。先ほどのくりこみ群による議論では、共形不変性はもとのモデルの可積分性によらず期待できるはずです。可積分でないモデルについても、例えば数値計算の結果を CFT と比較することによって CFT が適用できるかどうかをチェックすることができます。これによって、非常に多くの 2 次元統計力学系や 1+1 次元の量子多体系が CFT で記述できることがわかってきました。

面白い応用として、講演ではパーコレーションの問題を紹介しました。パーコレーションというのはある意味純粋に幾何学的な問題で、例えば 2 次元正方格子のボンドをそれぞれ独立に確率 p で「オン」にし確率 $1-p$ で「オフ」にします。例えば長方形の系を考えて、その右側の辺と左側の辺が「オン」になっているボンドをたどってつながっているかどうかを考えます。系の大きさを大きくした極限では、ある臨界値 p_c が存在して、$p > p_c$ ならば系の左右は確率 1 でつながります。一方、$p < p_c$ ならば同じ極限で左右がつながる確率は 0 になります。$p = p_c$ は臨界点になっていて、ここではつながる確率は有限になります。

この有限の確率は系が大きい極限では系の大きさによらなく (スケール不変性) なりますが、長方形の形状に依存します。考えるとすぐわかるように、系が

縦長である方が左右がつながる確率が大きくなります。このように、左右がつながる確率は長方形の縦横比の関数になります。この関数は Cardy によって CFT を用いて求められています [6]。パーコレーションは計算機上でシミュレーションすることができますが、数値シミュレーションの結果と CFT の予言は非常に高い精度で一致しています [7]。このように、イジングモデルなどのいわゆる「スピン系」に限らず、もっと広いクラスの問題でも共形不変性と言う概念は成立するようです。

例えばイジングモデルについては既に厳密解によっていろいろなことが知られていたので、CFT によって新しくわかったことというのはあまりないと言えるでしょうが、具体的なスピン系が共形不変性と言う非常に高い対称性を獲得する、という事実そのものは非常に重要だと思います。CFT がいろいろな系に実際に適用できる、ということはまた具体的に計算することが難しいくりこみ群の考え方を間接的に支持していると言えるでしょう。

4 Virasoro 代数

CFT の考え方をもう少し具体的に見てみましょう。対称性から系の性質を決める、ということは普通の量子力学でも良く行われます。典型的な例として、角運動量の理論があります。角運動量は回転対称性に関係していて、角運動量の理論は数学的には $SU(2)$ の表現論に相当しました。CFT も同様に、共形不変性に対応する代数があり、その表現を考えることになります。共形不変性に対応する代数を Virasoro 代数と呼び、これは次の交換関係で定義されます。

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}$$

ここで n, m は整数値を取ります。(正も負も取り得る) (本当は Virasoro 代数が 2 組出て来るのですが、今は簡単のためそのあたりは省略します。) この代数は普通の量子力学と同様に状態に作用すると考えることもできますし、CFT では場と状態に 1 対 1 の対応がつくので場 (全ての場のつくる空間) に作用すると見なすこともできます。

交換関係に現われる c はセントラルチャージと呼ばれる定数で、これは系の持っている自由度を表します。例えば、自由なボソン場が一つあったら c は 1 になります。具体的な物理的効果として、1 次元量子多体系が CFT で記述される場合、低温での比熱は温度を T とすると cT に比例することが知られています。

さて、Virasoro 代数を眺めてみますと、L_n を作用させると L_0 の固有値は $-n$ だけ変化することがわかります。これは、角運動量の理論で $S^{\pm}$ が S^z の固有値を ± 1 だけ変化させることと類似しています。そこで、正の n を持つ L_n を

降下演算子、負のものを上昇演算子のように考えます。実は L_0 は一様なスケール変換 (どの場所も同じ倍率で拡大縮小する、普通のスケール変換) の生成子という重要な意味を持っていて、これを conformal weight と呼びます。上で述べたように Virasoro 代数は場に作用すると考えることができますが、この時ある場 ϕ が conformal weightΔ を持っているとすると、ϕ の相関関数は

$$\langle \phi(r)\phi(0)\rangle \sim \frac{1}{r^{\Delta}}$$

となります[4]。これは、L_0 がスケール変換の生成子であることを考えると自然に理解できるでしょう。ここで相関関数の距離依存性をあたえる Δ は臨界指数と呼ばれるものの一種です。臨界現象の理論においては臨界指数が重要な量だった訳ですが、CFT においてはそれが Virasoro 代数の L_0 の固有値という代数的な量で与えられるわけです。

ある状態 (または場) が与えられた時、そこに降下演算子を掛けていくと、どんどん conformal weight が小さくなります。これが負になってしまうと、対応する場の相関関数は距離が大きくなるほど大きくなるという結果になります。通常の統計力学系では相関関数は距離とともに減少すると考えられますから、対応する CFT では負の conformal weight は許されない[5]ということになります。したがって、適当な状態から出発して降下演算子を掛けて conformal weight を下げることをくりかえしてあるところまで行くと、そこに降下演算子を掛けるとゼロにならなくてはなりません。ちょうど角運動量の理論で $S^z = -S$ のところに降下演算子を掛けるとゼロになるのと似た状況です。

この任意の降下演算子を掛けるとゼロになる状態 (場) を、primary state (primary field) と呼びます。逆に、任意の状態は primary state に上昇演算子をいくつか掛けると作れることになります。このようにして作った状態を、元の primary state の descendant (子孫) と呼びます。一般に一つの primary から無限個の descendant を作れますが、これらをまとめて conformal family と呼びます。

一般に場の理論においては無限個の種類の場が存在します。ここで言う場は、統計力学では測定可能な (局所的な) 物理量に対応しています。(念のために言うと、例えば自由な一成分のボソン場の場合、ボソン場は一つしかないわけですが、物理量としては例えばボソン場の微分を考えることもできます。高階微分

[4] この式でも Virasoro 代数が 2 組あることを無視しています。本当はもう一つの conformal weight も効いて来ます。

[5] 通常のスピン系ではそうですが、もっと一般の統計力学系を考えると負の conformal weight が許される場合もあります。

まで考えるとそれだけで無限個の物理量が存在します。上ではこの意味で無限個の場が存在すると言っています。)

しかし、ある一つの primary から無限個の descendant を作れるので、有限の conformal family だけで CFT に現われる場を全て尽くせる場合があります。(無限個の conformal family が必要な場合もあります。) primary のふるまいを決めれば descendant については Virasoro 代数から自動的に決まってしまいます。従って、有限個の conformal family で尽くせる場合は、無限自由度の場の理論が、有限個の primary のふるまいを決めるというある意味で有限自由度の問題に帰着すると言えます。

なお、無限個の conformal family が必要な場合は共形不変性を使ってもまだ無限個の自由度の問題が残っているため、有限個の conformal family しかない場合に比べると難しく理論の構造も未だ良くわかっていません。(ただし、Virasoro 代数についての conformal family が無限個でも更に高い対称性があってその代数についての primary field が有限個であれば有限自由度の問題に帰着できます。)

5 OPE と相関関数

有限個の conformal family のみ現われる場合、CFT が有限自由度に帰着するという一例として 4 点相関関数を考えましょう。場の理論／統計力学の基本概念としてくりこみ群と同様に重要 (だが、くりこみ群ほど有名でない?) ものに演算子積展開 (Operator Product Expansion, OPE) があります。これもアイデアは単純で、2 つの異なる点にある場が近付く (あるいは遠くから見る) と 1 点にある何らかの場として見なせるだろうと言うことです。具体的に書くと、

$$\phi_a(x)\phi_b(0) \sim \sum_c C_{ab}^c x^{(\Delta_c-\Delta_a-\Delta_b)}\phi_c(0)$$

ということです。この式の意味は両辺の場を含む相関関数が一致すると言う意味です。ここではあまり詳しく議論できませんが、OPE はくりこみ群とともに非常な重要性を持っています。

OPE を使うと、4 点相関関数は 2 点相関関数の和として書けます。イメージ的には、2 つの場をぶつけると「中間状態」ができてそれが伝播するわけです。さて、中間状態 (OPE によって生成される場) は無限個あるわけですが、primary の係数が決まるとその descendant の係数は Virasoro 代数から全て決まってしまいます。従って、4 点関数への中間状態の寄与も primary の係数さえ決まればその descendant の分は自動的に決まり、4 点関数は conformal family か

らの寄与の和で書けます。

$$\langle \phi_a(x_1)\phi_b(x_2)\phi_c(x_3)\phi_d(x_4)\rangle = \sum_e C^e_{ab} C^e_{cd} F^e_{abcd}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

ここで e は primary についてのみ和をとります。F は conformal family の中からの寄与を足し上げたもので、共形不変性から自動的に決まる部分です。OPE の係数 C^e_{ab} は共形不変性のみからは決まりませんが、この有限個の係数を決まれば 4 点関数が決まることになります。この係数を決めるには共形不変性だけでは足りないのですが、しばしば相関関数が 1 価関数であることなど別の情報から決めることができます。このような要請から 4 点関数を決めると OPE の係数が決まることになります。

CFT では共形不変性だけから全て決まるわけではなく、別の仮定も必要なのですがしばしば一見「当り前」の仮定から非自明な結果が得られることがあります。これは雑に言えば、無限の自由度について共形不変性を使って既に制御しているため、「あと少し」の情報が非常に役に立つと言えます。別の例として、モジュラー不変性があります。これは、周期的境界条件を課した長方形の系の分配関数を考えると、縦と横を入れ換えても分配関数は不変であると言うものです。当り前と言えばあたりまえなのですが、共形不変性を使うと分配関数が Virasoro 代数の指標の和で書けて、それがモジュラー不変性を持つことを要請すると分配関数に対して強い制限が付きます。

6　有限サイズ効果

4節では臨界指数が Virasoro 代数の生成子 L_0 の固有値から求まると述べましたが、 Virasoro 代数の表現論だけからこれが決まる場合もあります。しかし、表現論だけからは決まらない場合や、あるいはそもそも CFT が元のモデルに適用できるかどうか確認したい場合は数値計算や厳密解から得られる有限サイズのエネルギースペクトルが利用できます。

CFT についての概念的な興味を離れて「実用的」な立場からは、可積分系は厳密に解けるのにわざわざ CFT を持ち出す必要があるのか、数値計算によって高精度でわかるなら CFT なんていらないんじゃないか、という疑問があるかもしれません。これに対しては、可積分系は厳密に解けると言っても通常全ての欲しい量が計算できるわけではなく、一般にエネルギースペクトルが得られたとしても相関関数の計算は難しいのです。CFT を使うとこのエネルギースペクトルの情報から相関関数を決めることができます。数値計算についても、一般に数値計算は有限の大きさの系しか扱えないので (特に臨界点では) 熱力学的

極限でのふるまいを直接外挿で知ることは難しいわけです。この場合もCFTを組み合わせて使うことによって熱力学的極限のふるまいを効率的に調べることができます。

有限サイズスペクトルを考察するには、平面を円筒に移す共形変換 $z = \exp(2\pi w/N)$ を考えるのが便利です。この写像で、z の複素平面が w についての幅 N で長さ無限大の円筒に移されます。この時、Virasoro代数の生成子 L_0 を考えると、これは平面では全体のスケール変換の生成子でした。z 平面上で原点を中心としたスケール変換は、w では軸方向への並進移動に対応します。これは、周期的境界条件を課した有限サイズ系を(虚)時間方向に並進移動することを意味しますから、L_0 はまさに有限系に対するハミルトニアンに対応すること[6]になります。

従って、有限系の(低エネルギーの)エネルギースペクトルを調べることによって L_0 の固有値すなわち臨界指数を決定することができ、これからいろいろな場の相関関数を知ることができます。有名な応用例として、朝永-Luttinger液体の問題があります。これは物性物理としても面白いのですが、紙数の関係と既に[5]などの日本語の解説も多いので省略します。

7 21世紀へ向けて

結局CFTでわかったことは何でしょうか?共形不変性が現われるということそのものも面白いし、またCFTによって得られた個々の結果を挙げると切りがありません。非常に大局的な見地からは、CFTというのは'70年代までにKadanoff,Wilson等によって構築されたくりこみ群とOPEを骨子とする場の理論/統計力学の一種の数学的な実現と見なすことができるでしょう。

くりこみ群とOPE自体は非常に一般的な概念ですが、ハミルトニアンやラグランジアンを元に具体的に計算できるのは普通は摂動論に限られています。CFTは、ある意味で非摂動的な場の理論を具体的に構成し、しかもその場の理論としての構造が明らかになっているわけです。逆に、2次元の臨界点直上に限らない一般的な概念としてはくりこみ群やOPEを超えるものは(未だ)出て来ていないとも言えるかもしれません。

個人的には次のように考えています。例えば相転移という概念はずいぶん昔からあったと思います。しかし、統計力学のモデルの枠内で相転移と言うものが実際に存在するかどうかについては良く分かっていませんでした。1944年にOnsagerによって2次元イジングモデルの厳密解が提出されたわけですが、これ

[6]ここでもVirasoro代数が2組あることなど正確な話を省いているので、正確な話は文献を見て下さい。

は実際に相転移と言うものが統計力学のモデルによって実現できる、ということを示した上で大きな意味がありました。しかし、それだけではなく、イジングモデルの厳密解には例えばスケール不変性と言った当時知られていなかった概念も隠れていたわけです。もちろんそれだけが役に立ったわけではありませんが、イジングモデルの厳密解がその後の臨界現象あるいは現代的な場の理論の発展に果たした役割は計り知れません。一方、現在ではくりこみ群と OPE は臨界現象と場の理論の基本的な概念となっていますが、これらをある意味で実現したのが CFT であると思います。CFT にはそれ以上の何かが隠れているのかどうかはわかりませんが、将来の大切な概念になる何かが潜んでいるのではないかと (私は) 期待しています。もちろん CFT の重要な利点はいろいろな量が具体的に計算できるということであり、今後も具体的な物理の問題に適用して結果を得ることが期待されます。しかし同時に、何か潜んでいる (かもしれない) 概念を探し出すことも大切なのではないかと思います。

参考文献

[1] J. Cardy, "Conformal Invariance and Its Application to Statistical Mechanics" in *Fields, Strings and Critical Phenomena* Les Houches Summer School 1988 (North Holland)

[2] P. Ginsparg, "Applied Conformal Field Theory" in *Fields, Strings and Critical Phenomena* Les Houches Summer School 1988 (North Holland)

[3] C. Itzykson and J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory* (Cambridge University Press)

[4] P. DiFrancesco, P. Mathieu and D. Senechal, *Conformal Field Theory* (Springer)

[5] 川上則雄、梁成吉 「共形場理論と 1 次元量子系」 (岩波書店)

[6] J. Cardy, J. Phys. A **25**, L201 (1992).

[7] R. Langlands, Ph. Pouliot and Y. Saint-Aubin, Bull. Amer. Math. Soc. **30**, 1 (1994).